Kapitel 1

Einleitung

Anpassungstests spielen in der Statistik eine wichtige Rolle. In vielen Fällen kann die Überprüfung der Hypothese, daß das den beobachteten Daten zugrundeliegende wahre Modell in einer vorgegebenen Modellfamile enthalten ist, auf das Testen von Hypothesen über die Parameter einer Multinomialverteilung zurückgeführt werden.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht Pearsons χ^2, die in der Literatur wohl am häufigsten eingesetzte Statistik zum Test derartiger Hypothesen. Ausgehend von der χ^2-Diskrepanz, einem Maß für die Abweichung eines hypothetischen vom wahren Parametervektor, lassen sich die Hypothesen zum klassischen Anpassungstest als Hypothesen über die χ^2-Diskrepanz neu formulieren.

Es existieren neben Pearsons χ^2 andere Prüfgrößen für Anpassungstests. Zu nennen wären z. B. die Log-Likelihood-Ratio-Statistik G^2, das modifizierte χ^2 nach Neyman (1949) und, etwas seltener eingesetzt, die Freeman-Tukey-Statistik (Fienberg, 1979). Jeder dieser Statistiken kann eine Diskrepanz zugeordnet werden, und die verschiedenen Diskrepanzen können als unterschiedliche Maße des „Abstands“ des wahren Modells von der approximierenden Modellfamilie interpretiert werden. Unter der Nullhypothese besitzen die genannten Prüfgrößen die gleiche asymptotische Verteilung (Read & Cressie, 1988), bei Fehlspezifikation sind sie i. allg. nicht mehr asymptotisch äquivalent. Eine interessante Aufgabe ist es nun zu untersuchen, welcher Test in welcher Situation zu bevorzugen ist. Dazu werden Aussagen über die Macht benötigt.

In Kapitel 2 wird die Verteilung der χ^2-Prüfgröße bei einfachen Hypothesen untersucht, wobei das asymptotische Verhalten bei Fehlspezifikation des

Modells im Mittelpunkt steht. Es werden klassische Approximationen betrachtet und diesen einige neue bzw. alternativ abgeleitete Approximationen gegenübergestellt. Es folgt ein Vergleich, zunächst aufgrund der ersten beiden Momente, dann in bezug auf die Annäherung an die exakte Verteilungsfunktion mit wachsender Stichprobengröße. In einem weiteren Abschnitt wird die Eignung der Approximationen zur Berechnung der exakten Macht durch einen neuen theoretischen Ansatz überprüft. Es zeigt sich, daß einige Verteilungen *prinzipiell* nicht oder nur mit großen Einschränkungen zur Powerapproximation geeignet sind. Als am theoretisch befriedigendsten erweist sich eine aus den Ergebnissen von Drost et al. (1989) abgeleitete Verteilung. Abgeschlossen wird das Kapitel durch eine breit angelegte Simulationsstudie, die die aufgestellten Behauptungen stützt.

In Kapitel 3 werden die Untersuchungen des zweiten Kapitels, soweit möglich, auf zusammengesetzte Hypothesen übertragen. Zunächst besteht das Problem der Wahl des Schätzverfahrens für die auftretenden Parameter. Hierzu wird eine sehr allgemeine Klasse von Diskrepanzen konstruiert, über die dann sogenannte Minimum-Diskrepanz-Schätzer hergeleitet werden. Die üblicherweise verwendeten Maximum-Likelihood- bzw. Minimum-χ^2-Schätzer sind Spezialfälle dieser Klasse von Schätzern. Mittels der multivariaten Delta-Methode und des Satzes über implizite Funktionen läßt sich dann die asymptotische Verteilung von χ^2 unter der Nullhypothese als auch unter „local alternatives“ (Mitra, 1958) ableiten. Im Gegensatz zu den klassischen Ansätzen können *beliebige* Minimum-Diskrepanz-Schätzer zu Diskrepanzen aus der obengenannten Klasse eingesetzt werden. Die Idee des Ansatzes von Drost et al. (1989) wird für die χ^2-Prüfgröße auf die zusammengesetzte Hypothese übertragen. Durch diese Erweiterung ist es möglich, die erzielbare Macht bei Anwendung des χ^2-Anpassungstests für ein vorgegebenes wahres Modell sehr genau vorauszusagen. Anhand von Simulationen wird die Überlegenheit dieser neuen Approximation gegenüber alten Annäherungen demonstriert.

Die Ideen der Kapitel 2 und 3 werden in Kapitel 4 auf Diskrepanzen aus der oben erwähnten Klasse angewendet, solange dies möglich ist. Es zeigt sich, daß die verbesserte Approximation der wahren Macht u. a. für den modifizierten χ^2-Test nach Neyman (1949) und für den Anpassungstest unter Verwendung der Freeman-Tukey-Statistik herzuleiten ist, wobei im Fall der zusammengesetzten Hypothese beliebige Minimum-Diskrepanz-Schätzer eingesetzt werden dürfen.

Durch die Verwendung der χ^2-Diskrepanz wird die formale Basis ge-

schaffen, die Fehlspezifikation der Modellfamilie von vornherein zuzulassen. In Kapitel 5 wird die realitätsnähere Hypothese überprüft, daß der „Abstand“ zwischen approximierender Modellfamilie und wahrem Modell gemäß der χ^2-Diskrepanz eine vorgegebene Grenze nicht überschreitet. Für die Konstruktion von passenden Tests eignen sich die Anfang der achtziger Jahre entwickelten Bootstrap-Methoden. Nach einer Einführung in das Bootstrap-Verfahren werden zwei Bootstrap-Tests zur genannten Hypothese konstruiert. Ein weiterer Abschnitt zeigt die Schwierigkeiten auf, einen Bootstrap-*Anpassungs*test herzuleiten. In den anschließenden Simulationen wird überprüft, ob das angenommene Signifikanzniveau der Tests zufriedenstellend eingehalten wird. Weiterhin erfolgt die Herleitung eines Bootstrap-Tests zur Hypothese, daß eine Modellfamilie gemäß der χ^2-Diskrepanz einen größeren „Abstand“ zum wahren Modell besitzt als eine alternative Modellfamilie.

In Kapitel 6 wird aufgezeigt, wie Bootstrap-Tests für andere Diskrepanzen aufgebaut werden können. Als konkretes Anwendungsbeispiel wird ein Anpassungstest für die aus der euklidischen Distanz abgeleitete Gauß-Diskrepanz konstruiert.